

Recasages possibles : 201, 205, 208, 213, 234, 245.

Références : 40 développements, BERNIS² (p. 121-126)

Développement On note \mathbb{D} le disque unité ouvert de \mathbb{C} , $\mathcal{C} = \partial\mathbb{D}$, et on définit l'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}, \lambda) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$, où λ est la mesure de Lebesgue.

Lemme 1 Soit $f \in B^2(\mathbb{D})$ et $K \subset \mathbb{D}$ compact. Alors,

$$\max_K |f| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}d(K, \mathcal{C})} \|f\|_2$$

Théorème 2 L'espace $B^2(\mathbb{D})$, muni du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert. De plus, la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où e_n est définie sur \mathbb{D} par $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$, est une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$.

Proposition 3 Si $f \in B^2(\mathbb{D})$, alors on a pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\pi(1 - z\bar{\zeta})^2} d\lambda(\zeta)$$

- *Preuve du Lemme 1 :* Soient $f \in B^2(\mathbb{D})$ et $K \subset \mathbb{D}$ compact. Soient $a \in K$ et $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq r < 1 - |a|$, de sorte que $\overline{D(a, r)} \subset \mathbb{D}$. D'après la formule de la moyenne, comme f est holomorphe sur \mathbb{D} , on a pour tout $\rho \in [0, r]$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

De cette formule on déduit que $f(a)$ est aussi égal à la valeur moyenne de f sur $D(a, r)$. En effet, par changement de variables en coordonnées polaire, puis par Fubini, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(a, r)} f(z) d\lambda(z) &= \iint_{D(a, r)} f(x + iy) dx dy \\ &= \iint_{]0, r[\times]0, 2\pi[} f(a + \rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \right) \rho d\rho \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant la formule de la moyenne précédente, on obtient

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{D(a, r)} f(z) d\lambda(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi f(a) \rho d\rho = f(a).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient alors

$$\begin{aligned} |f(a)| &\leq \frac{1}{\pi r^2} \left(\int_{D(a, r)} |f(z)|^2 d\lambda(z) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{D(a, r)} 1^2 d\lambda(z) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2} \|f\|_2 \sqrt{\lambda(D(a, r))} \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2} \|f\|_2 \sqrt{\pi r^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \|f\|_2. \end{aligned}$$

En faisant tendre r vers $1 - |a|$, on conserve l'inégalité large d'où

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}(1 - |a|)} \|f\|_2.$$

Par ailleurs, $d(K, \mathcal{C}) \leq d(a, \mathcal{C}) = 1 - |a|$ d'où

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}d(K, \mathcal{C})} \|f\|_2.$$

Cette majoration étant valable pour tout $a \in K$, on obtient bien finalement

$$\max_{a \in K} |f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}d(K, \mathcal{C})} \|f\|_2.$$

Ceci termine la preuve du **Lemme 1**.

- *Preuve du Théorème 2 :* Montrons que $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire induit par $L^2(\mathbb{D})$. Il suffit de montrer que $B^2(\mathbb{D})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_2$. Soit donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B^2(\mathbb{D})^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_2$. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N, \|f_n - f_m\|_2 \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ comme ci-dessus. Soit $K \subset \mathbb{D}$ un compact. D'après le **Lemme 1**, on a pour tous $n, m \geq N$,

$$\max_{z \in K} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}d(K, \mathcal{C})} \|f_n - f_m\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}d(K, \mathcal{C})}.$$

Ainsi, (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme pour la convergence sur tout compact de \mathbb{D} . Par conséquent, par complétude de l'espace métrique $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ muni de la distance associée à la convergence uniforme sur tout compact, (f_n) converge uniformément sur tout compact de \mathbb{D} vers une fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. En particulier, on a convergence simple de (f_n) vers f sur \mathbb{D} , i.e pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = f(z)$.

D'autre part, (f_n) est (par définition) une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{D})$. Ainsi, d'après le théorème de Riesz-Fischer, (f_n) converge dans $L^2(\mathbb{D})$ vers une fonction $g \in L^2(\mathbb{D})$, et il existe une extractrice φ telle que $(f_{\varphi(n)})$ converge presque partout vers g . Ainsi, par unicité de la limite (simple), on a pour presque tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = g(z)$, et ainsi $f \in L^2(\mathbb{D})$. Ceci montre que (f_n) converge, pour la norme $\|\cdot\|_2$ vers une fonction $f \in B^2(\mathbb{D})$, ce qui montre que $B^2(\mathbb{D})$ est complet. C'est donc bien un espace de Hilbert. On montre désormais que la famille (e_n) introduite dans l'énoncé du théorème est bien une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$, c'est-à-dire qu'elle est orthonormée (au sens où $\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{nm}$) et totale, i.e $B^2(\mathbb{D}) = \overline{\text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})}$. Montrons d'abord que la famille est orthonormée : fixons $n, m \in \mathbb{N}$, et calculons $\langle z \mapsto z^n | z \mapsto z^m \rangle$ en passant aux coordonnées polaires.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z^m} d\lambda(z) &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^n r^m e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta \right) r dr \\ &= \int_0^1 r^{n+m+1} dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{n+m+2} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Si $n \neq m$, l'intégrale est nulle, car

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \left[\frac{e^{i(n-m)\theta}}{i(n-m)} \right]_0^{2\pi} = \frac{1-1}{i(n-m)} = 0.$$

En revanche, si $n = m$, on obtient

$$\int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z^m} d\lambda(z) = \frac{1}{2(n+1)} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\langle e_n | e_m \rangle = \int_{\mathbb{D}} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \sqrt{\frac{m+1}{\pi}} \overline{z^m} d\lambda(z)$$

$$\implies \langle e_n | e_m \rangle = \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z^m} d\lambda(z) = \frac{n+1}{\pi} \frac{\pi}{n+1} \delta_{nm} = \delta_{nm}.$$

La famille (e_n) est bien orthonormée, montrons maintenant qu'elle est totale, ce qui revient à montrer que $F^\perp = \{0\}$ en notant $F = \text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Soit $f \in B^2(\mathbb{D})$ orthogonale à F . Comme $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, f est développable en série entière en 0 avec pour rayon de convergence du DSE égal à 1. Autrement dit, il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

De plus, la formule de Cauchy permet d'exprimer les a_n sous la forme suivante

$$\forall r \in]0, 1[, a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 0 = \langle f | e_n \rangle &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_0^1 r^n \left(\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right) r dr \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_0^1 r^{n+1} 2\pi r^n a_n dr \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \frac{2\pi a_n}{2n+2} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} a_n. \end{aligned}$$

Finalement, on a bien $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $f = 0$ et $F^\perp = \{0\}$. Ceci montre que la famille (e_n) est bien totale, donc c'est une base hilbertienne de l'espace $B^2(\mathbb{D})$, et le **Théorème 2** est démontré.

- *Preuve de la Proposition 3* : Soit $z \in \mathbb{D}$. L'application

$$\text{eval}_z : \begin{cases} B^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ f & \longmapsto f(z) \end{cases}$$

est une forme linéaire sur $B^2(\mathbb{D})$. D'après le **Lemme 1**, si K est un compact contenant z , on a pour toute $f \in B^2(\mathbb{D})$,

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in K} |f(\zeta)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K, \mathcal{C})} \|f\|_2.$$

Ainsi, eval_z est une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert $B^2(\mathbb{D})$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $k_z \in B^2(\mathbb{D})$ tel que pour toute $f \in B^2(\mathbb{D})$, $\text{eval}_z(f) = f(z) = \langle f | k_z \rangle$. Comme $k_z \in B^2(\mathbb{D})$, d'après le **Théorème 2**, on a

$$k_z = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle k_z | e_n \rangle e_n$$

Ainsi, en passant au conjugué (la conjugaison étant bien une application continue $L^2(\mathbb{D}) \rightarrow L^2(\mathbb{D})$), on obtient

$$\overline{k_z} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle k_z | e_n \rangle e_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n | k_z \rangle \overline{e_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(z) \overline{e_n}.$$

La convergence de cette série est a priori au sens $L^2(\mathbb{D})$, mais d'après le **Lemme 1**, elle converge également uniformément sur tout compact de \mathbb{D} . En particulier, pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$,

$$\overline{k_z(\zeta)} = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(z) \overline{e_n(\zeta)} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) (z\overline{\zeta})^n = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^2},$$

où l'on a utilisé le fait que la série $\sum (n+1)x^n$ est la série dérivée de $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$. Enfin on a bien montré que

$$f(z) = \langle f | k_z \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) \overline{k_z(\zeta)} d\lambda(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\pi(1-z\overline{\zeta})^2} d\lambda(\zeta).$$

Ceci achève la preuve de la **Proposition 3**.

Commentaires et compléments :

- Si $f \in B^2(\mathbb{D})$ a pour développement en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur \mathbb{D} , on peut donner une formule explicite de sa norme $\|f\|_2$ via les a_n (qui généralise en quelque sorte le calcul des normes des fonctions monômiales mené dans la preuve du **Théorème 2**). En effet, remarquons tout d'abord que si $r \in]0, 1[$, alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

On reconnaît ainsi le développement en série de Fourier de $\tilde{f}_r : \theta \in \mathbb{R} \mapsto f(re^{i\theta})$. En particulier, comme $f \in L^2(\mathbb{D})$, on a $\tilde{f}_r \in L^2_{2\pi}$ donc la formule de Parseval donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{f}_r(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(\tilde{f}_r)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Ainsi, le théorème de Fubini-Tonelli et le changement de variables en coordonnées polaires donnent

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \iint_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\lambda(z) = \int_0^1 r \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta dr \\ &= \int_0^1 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n+1} dr \\ &= \pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \int_0^1 2r^{2n+1} dr \\ &= \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}. \end{aligned}$$

On retrouve en particulier que $\|z \mapsto z^n\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}$.